Eine Bemerkung über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen

Von Z. JANKO in Lištica (Jugoslawien)

Wir betrachten nur endliche Gruppen. Sei π eine nichtleere Primzahlmenge. Ein Element x einer Gruppe G ist ein π-Element, wenn die Ordnung von x nur durch Primzahlen aus π teilbar ist. Das Einselement 1 von G sei ein π-Element für jede Primzahlmenge. Eine Gruppe G ist eine π-Gruppe, wenn alle ihre Elemente π-Elemente sind. Die Gruppe G ist π-abgeschlossen, wenn die Menge G_π aller π-Elemente von G eine Gruppe bildet. Die Gruppe G_π ist dann ein Hallscher π-Normalteiler von G, d. h. G_π ist eine π-Gruppe, normal in G und die Ordnungen von G_π und G/G_π sind relativ prim. Eine Untergruppe H von G ist eine nachinvariante (subnormale) Untergruppe von G, wenn sie ein Glied einer Kompositionsreihe von G ist. Der folgende Satz ist bekannt: Ein Normalteiler N einer Gruppe G ist nilpotent dann und nur dann, wenn $N/(N\cap\Phi(G))$ nilpotent ist, wo $\Phi(G)$ die Frattinische Untergruppe von G (d. h. der Durchschnitt aller maximalen Untergruppen) bezeichnet (vgl. BAER [1] oder GASCHÜTZ [3]). Das Ziel dieser Note ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes. Aus unserem Satz werden wir dann als Korollar einen Satz von ITÔ [5] bekommen, welcher nur in einigen Spezialfällen von WIELANDT und HUPPERT früher bewiesen war. Nach WIELANDT [6] ist nämlich eine Gruppe G nilpotent dann und nur dann, wenn die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G die Kommutatorgruppe G' von G umfaßt. Nach HUPPERT [4] ist die Kommutatorgruppe G' von G nilpotent dann und nur dann, wenn die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G die zweite Kommutatorgruppe G'' von G umfaßt.

Satz. *Sei H eine nachinvariante Untergruppe einer Gruppe G. Genau dann ist H π-abgeschlossen, wenn $H/(H\cap\Phi(G))$ π-abgeschlossen ist.*

Beweis. Wenn H π-abgeschlossen ist, dann ist $H/(H\cap\Phi(G))$ π-abgeschlossen. Es ist nämlich $(H/(H\cap\Phi(G)))_\pi = H_\pi(H\cap\Phi(G))/(H\cap\Phi(G))$. Wenn $H/(H\cap\Phi(G))$ π-abgeschlossen ist, dann ist auch die Gruppe $(H\Phi(G))/\Phi(G)$ π-abgeschlossen und nachinvariant in $G/\Phi(G)$. Denn es ist $H/(H\cap\Phi(G)) \approx (H\Phi(G))/\Phi(G)$. Sei $M/\Phi(G)$ eine maximale π-abgeschlossene nachinvariante Untergruppe von $G/\Phi(G)$, welche $(H\Phi(G))/\Phi(G)$ umfaßt. Es ist möglich dann ähnlich wie im Beweis des Hilfssatzes bei ITÔ [5] zu beweisen, daß M ein Normalteiler von G ist. Ist M nicht normal in G, so gibt es zwei nachinvariante Untergruppen $M_1/\Phi(G)$ und $M_2/\Phi(G)$ von $G/\Phi(G)$ mit $M\subset M_1\subset M_2$ derart, daß M in M_1 normal ist, in M_2 aber nicht und M_1 normal in M_2 ist. Dann gibt es eine in $M_2/\Phi(G)$ zu $M/\Phi(G)$ konjugierte Untergruppe $M^*/\Phi(G)$, welche von $M/\Phi(G)$ verschieden ist. Offenbar ist $(MM^*)/\Phi(G)$ ein π-abgeschlossener Normalteiler von $M_1/\Phi(G)$, welcher $M/\Phi(G)$ eigentlich umfaßt;

denn das Produkt zweier π-abgeschlossener Normalteiler einer Gruppe ist ein π-abgeschlossener Normalteiler dieser Gruppe (vgl. BAER [2] Seite 129). Da $(MM^*)/\Phi(G)$ in $G/\Phi(G)$ nachinvariant ist, widerspricht dies der Maximaleigenschaft von $M/\Phi(G)$. Also ist M normal in G.

Die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G ist nach BAER [1] Seite 645 schwach hyperzentral und daraus folgt nach BAER [1] Korollar 1 der Proposition 2 aus § 1, daß die Gruppe M (also auch H) π-abgeschlossen ist. Ein direkter Beweis ist der folgende. Sei $N/\Phi(G)$ ein Hallscher π-Normalteiler von $M/\Phi(G)$ d. h. $N/\Phi(G) = (M/\Phi(G))_\pi$. Dann ist M/N eine π'-Gruppe, wo π' wie üblich die komplementäre Primzahlmenge von π bezeichnet. Ist A ein Hallscher π'-Normalteiler der nilpotenten Gruppe $\Phi(G)$, d. h. $A = (\Phi(G))_{\pi'}$, dann existiert (nach einem Satz von SCHUR, s. ZASSENHAUS [7], Seite 125) eine Gruppe B so daß $N = BA$, $A \cap B = 1$ gilt. Denn A ist eine charakteristische Untergruppe von $\Phi(G)$ also normal in N und die Ordnungen von A und N/A sind relativ prim. B ist offenbar eine π-Hallgruppe von M, d. h. die Ordnung von B und der Index $[M:B]$ sind relativ prim. Da A eine auflösbare Gruppe ist, so sind nach [7] Seite 126 alle Komplemente von A in N konjugiert in N. Es gilt daher $G = \mathfrak{N}(B)\cdot N$, wo $\mathfrak{N}(B)$ den Normalisator von B in G bezeichnet. Für ein beliebiges Element x aus G ist nämlich $x^{-1}Bx$ ein Komplement von A in N, d. h. es gelten $x^{-1}Bx\cdot A = N$ und $x^{-1}Bx \cap A = 1$. Es existiert daher ein Element y aus N mit $x^{-1}Bx = y^{-1}By$, also ist xy^{-1} ein Element aus $\mathfrak{N}(B)$ und daraus folgt $G = \mathfrak{N}(B)\cdot N$. Wenn X eine Untergruppe aus $\Phi(G)$ ist, dann folgt aus $G = H\cdot X$ mit einer Untergruppe H von G bekanntlich $G = H$. Wir haben daher endlich $G = \mathfrak{N}(B).N = \mathfrak{N}(B).BA = \mathfrak{N}(B).A = \mathfrak{N}(B)$. Die Gruppe B ist normal in G also auch in M und daraus folgt $M_\pi = B$. Die Gruppe M ist also π-abgeschlossen. Somit ist auch H π-abgeschlossen, denn es gilt $H_\pi = M_\pi \cap H = B \cap H$.

Korollar. *Sei H eine nachinvariante Untergruppe einer Gruppe G. Genau dann ist H nilpotent, wenn die Frattinische Gruppe $\Phi(G)$ von G die Kommutatorgruppe H' von H umfaßt.*

Beweis. Nach GASCHÜTZ [3] ist die Frattinische Untergruppe $\Phi(H)$ einer nachinvarianten Untergruppe H von G in der Frattinischen Untergruppe $\Phi(G)$ von G enthalten. Wenn H nilpotent ist, dann ist nach Wielandt [6] $H' \subseteqq \Phi(H)$ und nach GASCHÜTZ [3] $\Phi(H) \subseteqq \Phi(G)$, also $H' \subseteqq \Phi(G)$. Wenn $H' \subseteqq \Phi(G)$ ist, dann ist $H/(H \cap \Phi(G))$ nilpotent (sogar abelsch). Die Gruppe H ist nilpotent dann, und nur dann wenn H p-abgeschlossen für jede Primzahl p ist. Also ist H nach unserem Satz nilpotent.

Literatur

[1] R. BAER, Nilpotent characteristic subgroups of finite groups, *Amer. J. Math.*, **75** (1953), 633—664.

[2] R. BAER, Classes of finite groups and their properties, *Illinois J. Math.*, **1** (1957), 115—187.

[3] W. GASCHÜTZ, Über die Φ-Untergruppe endlicher Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **58** (1953), 160—170.

[4] B. HUPPERT, Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **60** (1954), 409—434.

[5] N. ITÔ, Über die Frattini-Gruppe einer endlichen Gruppe, *Proc. Japan Acad.*, **31** (1955), 327—328.

[6] H. WIELANDT, Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von p-Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **41** (1936), 281—282.

[7] H. ZASSENHAUS, *Lehrbuch der Gruppentheorie*, I (Leipzig—Berlin, 1937).

(Eingegangen am 11. Juli 1961)